МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА

Кафедра математического анализа

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Карачаевск
2019

УДК - 517.98

ББК - 22.162

Печатается по решению редакционно-издательского совета Карачаево-Черкесского государственного университета имени У.Д. Алиева

Мамчуев А.М. Элементы функционального анализа. Методическое пособие / Мамчуев А.М. Карачаевск: изд-во КЧГУ, 2019. – 52 с.

Предлагаемое методическое пособие по дисциплине «Функциональный анализ» предназначено для студентов различных направлений подготовки бакалавров дневного и заочного отделений физико-математического факультета. В пособии приведены примеры и задачи иллюстрирующие теоретический материал.

Рецензенты:
М.Х. Чанкаев, канд. ф.-м. наук, доцент (КЧГУ)
З.М. Лайпанова, канд. ф.-м. наук, доцент (КЧГУ)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методическое пособие посвящено некоторым отдельным вопросам функционального анализа. Эти вопросы охватывают отдельные начальные разделы функционального анализа.

Одним из основных понятий математики является понятие функциональной зависимости (функции). Современные методы практического применения математических идей привели к возникновению новых ветвей и разделов математики. Одним из них является функциональный анализ, где достигаются наибольшие обобщения известных понятий математического анализа. Функциональный анализ изучает конечномерные и бесконечномерные пространства, состоящие из функций, векторов, последовательностей, матриц и т.д. Таким образом, функциональный анализ соединяет воедино теорию функций, теорию множеств, алгебру, геометрию и математический анализ.

В пособии нашли краткое изложение теория основных структур функционального анализа, методы их изучения, различные, примеры и задачи. Таким образом, пособие играет роль вводного курса в изучении основных понятий и идей функционального анализа. В целях более глубокого изучения материала по функциональному анализу можно использовать, как в качестве основной, так и дополнительной литературы, следующие учебники и учебные пособия, которые приведены в списке рекомендуемой литературы.

ГЛАВА I. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

I.1. Линейные пространства. Базис и размерность

В данном разделе будет введено понятие линейного пространства. Идея линейности является одним из важнейших принципов математики. На этой основе построены классический анализ, вариационное исчисление, более того, почти каждый физический процесс в малом (в определенном смысле) является линейным, что позволяет нам делать о нем достаточно точные выводы, изучая линейный, гораздо более простой для исследования объект.

В математике часто приходится встречаться с объектами, для которых определены операции сложения и умножения на числа. В геометрии, например, объектами такого рода являются векторы, т. е. направленные отрезки. В алгебре мы встречаемся с наборами из n чисел. В анализе встречаются операции сложения функций и умножения их на числа.

В приведенных примерах одни и те же операции сложения и умножения производятся над совершенно разными объектами. Для того, чтобы изучать все такие объекты с единой точки зрения, и вводится понятие линейного пространства.

Определение I.1.1. Множество E элементов $x, y, z, \ldots$ называется линейным пространством, если:

а) каждым двум элементам x и y поставлен в соответствие элемент z, называемый суммой элементов x и y и который обозначается $x+y$;

б) каждому элементу x и каждому вещественному числу λ поставлен в соответствие элемент λx, называемый произведением числа λ на элемент x.

При этом введенные операции должны удовлетворять следующим требованиям (аксиомам):

1) $x+y=y+x$ - (коммутативность);

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ - (ассоциативность);

3) существует элемент 0 такой, что $x+0=x$: для любого x. Элемент 0 называется нулевым элементом;

4) для каждого x существует противоположный элемент, обозначаемый $-x$, такой, что $x+(-x)=0$;

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

где α, β - вещественные числа.

Для определенности элементы линейного пространства называются векторами. В определении линейного пространства, совершенно не говорится о природе объектов.

Определение линейного пространства, не содержит никаких указаний о трехмерности рассматриваемого пространства. Это позволяет вести все рассуждения применительно к так называемым пространствам конечной размерности.

Определение I.1.2. Семейство векторов $\{e_1, ..., e_n\}$ в линейном пространстве *E* называется конечным базисом *E*, если любой вектор *x* из *E* представим в виде линейной комбинации векторов e_i, т.е. $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$, и это представление единственно. При этом числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$ называются координатами вектора *x* относительно базиса $\{e_1, ..., e_n\}$.

Пример 1. Пусть *E* - совокупность многочленов степени не больше *n* с вещественными коэффициентами, для которых определены обычные операции сложения многочленов и умножения многочлена на число. Очевидно, что это линейное пространство. Тогда система $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ является базисом в этом пространстве.

Определение I.1.3. Линейное пространство, имеющее конечный базис, называется конечномерным.

Пространства, не являющиеся конечномерными, называются бесконечномерными, и именно изучение таких пространств, а также функций, определенных на этих пространствах, и составляет содержание функционального анализа.

Рассмотрим некоторые свойства конечномерных пространств. Связано это с тем, что идеи и методы функционального анализа проще иллюстрируются с помощью пространств конечной размерности. Таким образом, мы рассмотрим ряд определений и теорем, и изучим основные свойства конечномерных пространств с тем, чтобы этот математический аппарат позволил нам перейти уже непосредственно к исследованию вопросов функционального анализа.

В любом конечномерном пространстве базис может быть выбран различными способами. Имеет место следующая теорема.

Теорема I.1.1. В конечномерном линейном пространстве число элементов базиса не зависит от выбора базиса.

Число элементов базиса называется размерностью пространства *R* и обозначается *dimE*. Если *dimE* = *n*, то пространство называется *n* - мерным.

Определение I.1.4. Система векторов $x_1,\dots,x_k$ называется линейно независимой, если равенство $\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_k x_k=0$ возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_k=0$.

В противном случае система векторов $x_1,\dots,x_k$ называется линейно зависимой. Непосредственно из определения следует, что если система $\{e_1,\dots,e_n\}$ образует базис в линейном пространстве *E*, то она линейно независима.

Геометрия линейного пространства

С помощью операций сложения и умножения на числа мы можем определить, что такое прямая, плоскость, размерность. Однако большое многообразие фактов, которыми изобилует анализ, в значительной мере объясняется возможностью измерений длин отрезков и углов между векторами. Наиболее естественный способ распространения на общие линейные пространства возможности измерения, мы обратимся к существующей в обычном трехмерном пространстве операции скалярного произведения двух векторов. Скалярное произведение двух векторов есть произведение длин этих векторов и косинуса угла между ними.

Определение I.1.5. Говорят, что в линейном пространстве *E* определено скалярное произведение, если каждой паре векторов *x, y* поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое (x,y), причем это соответствие обладает следующими свойствами:

1. $(x,y)=(y,x)$ - симметрия;
2. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$, где λ - действительное число;
3. $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$ - дистрибутивность;
4. для любого вектора *x*, $(x,x)\ge 0$, причем $(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда *x=0*.

Определение I.1.6. Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется евклидовым.

Приведем несколько примеров.

Пример 2. В трехмерном пространстве обычных векторов скалярное произведение вводится по правилам, излагаемым обычно в аналитической геометрии. Условия (1-4) выражают собой основные свойства скалярного произведения, их справедливость устанавливается в векторной алгебре.

Пример 3. В пространстве, где векторами являются наборы из n действительных чисел с покомпонентными операциями сложения и умножения их на числа, скалярное произведение двух векторов $x=(\xi_1,...,\xi_n),\ y=(\eta_1,...,\eta_n)$, можно определить формулой

$$(x,y)=\xi_1\eta_1+...+\xi_n\eta_n.$$

Легко видеть, что условия (1-4) выполнены. Это пространство обозначается символом R^n.

Пример 4. В пространстве, где векторами являются непрерывные, m - раз дифференцируемые функции, заданные на отрезке $[a,b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения функций на число, которое обычно обозначается символом $C_m[a,b]$, скалярное произведение можно определить следующим образом:

$$(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Определим длину (норму) вектора x пространства E по формуле

$$\|x\|_E=\sqrt{(x,x)}.$$

Многие основные свойства евклидова пространства устанавливаются с помощью важного неравенства Коши - Буняковского.

Теорема I.1.2. Для любых векторов x,y евклидова пространства E справедливо неравенство Коши - Буняковского

$$|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|.$$

Доказательство. Заметим, что в случае $x=0$ неравенство становится очевидным, поэтому достаточно рассмотреть случай $x\neq 0$.

Для любого вещественного t имеем

$$0\le(tx+y,tx+y)=t^2\|x\|^2+2t(x,y)+\|y\|^2.$$

Заметим, что в правой части неравенства стоит квадратный трехчлен. Поэтому дискриминант этого трехчлена неположителен, т. е.

$$(x,y)^2-\|x\|^2\|y\|^2\le 0, \qquad \text{(I.1.1)}$$

что и завершает доказательство теоремы.

Следствием неравенства (I.1.1) является обобщение известного в элементарной геометрии неравенства треугольника, а именно для любых векторов x и y из векторного пространства справедливо соотношение:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Пусть x и y - два ненулевых вектора евклидова пространства E. Согласно неравенству Коши - Буняковского

$$-1 \le \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1.$$

Поэтому существует единственный угол φ, $0 \le \varphi \le \pi$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Он называется углом между векторами x и y.

Определение I.1.7. Векторы x и y называются ортогональными, если скалярное произведение этих векторов равно нулю.

В случае, когда ортогональные векторы x и y отличны от нуля, угол между этими векторами, согласно данному выше определению, равен $\frac{\pi}{2}$.

Справедливо также правило параллелограмма, которое утверждает, что сумма квадратов длин диагоналей равна удвоенной сумме квадратов длин сторон. В векторной форме оно имеет вид:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Алгоритм построения попарно ортогональных векторов, построен на процедуре ортогонализации. Предварительно дадим одно определение.

Определение I.1.8. Пусть $f_1,..., f_m$ - произвольные векторы линейного пространства E. Тогда совокупность всевозможных линейных комбинаций векторов $f_1,..., f_m$ называется пространством, порожденным этими векторами (или линейной оболочкой этих векторов). Это пространство в дальнейшем будем обозначать символом $L(f_1,..., f_m)$.

Процесс ортогонализации

Пусть даны m линейно независимых векторов $f_1,..., f_m$. По этим векторам построим m попарно ортогональных векторов, порождающих то же пространство, что и векторы $f_1,..., f_m$.

Положим, $e_1 = f_1$. Вектор e_2 будем искать в виде $e_2 = f_2 + \alpha e_1$. Коэффициент α найдем из условия $(e_2, e_1) = 0,$ т. е. $(f_2 + \alpha e_1, e_1) = 0.$

Отсюда,

$$\alpha = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = 0.$$

Теперь построение ортогональной системы векторов легко завершить по индукции. Пусть попарно ортогональные и отличные от нуля векторы $e_1, ..., e_{k-1}$ уже построены. Вектор e_k ищем в виде $e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{k-1} e_{k-1}$, где коэффициенты λ_i находим из условия ортогональности вектора e_k к векторам $e_1, ..., e_{k-1}$. Учитывая факт попарной ортогональности векторов $e_1, ..., e_{k-1}$ получим

$$\lambda_1 = -\frac{(f_\kappa, e_1)}{(e_1, e_1)}, \lambda_2 = -\frac{(f_\kappa, e_2)}{(e_2, e_2)}, ..., \lambda_{\kappa-1} = -\frac{(f_\kappa, e_{\kappa-1})}{(e_{\kappa-1}, e_{\kappa-1})}.$$

Если векторы $f_1, ..., f_m$ линейно независимы, то построенные в результате процесса ортогонализации векторы $e_1, ..., e_{m-1}$ отличны от нуля.

Сформулируем еще два утверждения, которые решают вопрос о существовании в n - мерном евклидовом пространстве базиса, состоящего из попарно ортогональных векторов.

Утверждение 1. Любая система, состоящая из попарно ортогональных и отличных от нуля векторов $e_1, ..., e_k$, является линейно независимой.

Утверждение 2. Доказать, что в n - мерном пространстве любая система, состоящая из n линейно независимых векторов, является базисом.

Используя эти утверждения, дадим ответ на поставленный вопрос о существовании ортогонального базиса. По определению n - мерного пространства в нем существует какой-то базис $f_1, ..., f_n$ с помощью процесса ортогонализации из этого базиса можно построить систему $e_1, ..., e_n$ попарно ортогональных и отличных от нуля вектором, которая согласно утверждениям 1 и 2 является ортогональным базисом.

Если заменить векторы e_k векторами $e'_k = \dfrac{e_k}{\|e_k\|}$, то получим попарно ортогональные векторы длины 1.

Определение I.1.9. Ортонормированным базисом в евклидовом пространстве R называется базис, состоящий из попарно ортогональных векторов длины 1.

Приведем пример.

Пример 5. Многочлены Лежандра. Рассмотрим линейное пространство E всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше m, определенными на отрезке $[-1,1]$. Тогда векторы $\{1, x, x^2, ..., x^m\}$ образуют базис в этом пространстве. Введем в этом пространстве скалярное произведение по формуле

$$(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

Многочлены Лежандра $P_0(x), P_1(x), ..., P_m(x)$ определяются как результат процесса ортогонализации базиса $\{1, x, x^2, ..., x^m\}$. Обычно они нормируются условиями $P_n(1) = 1$.

I.2. Функционалы и операторы в линейном пространстве

Ранее были изучены вопросы, связанные с алгебраической и геометрической структурой линейных пространств. Проведем исследование объектов, являющихся ключевыми в математическом анализе, а именно понятия функциональной зависимости и понятия предельного перехода. Введем понятие функциональной зависимости. Пусть X и Y - два множества вещественных чисел; если каждому числу $x \in X$ по некоторому закону (правилу) ставится в соответствие единственное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X определена однозначная функция $y = f(x)$, область значений которой расположена в множестве Y. Множество X при этом называется областью определения функции.

Таким образом, мы видим, что для введения функциональной зависимости нет необходимости требовать, чтобы X и Y были множествами вещественных чисел. Понимая под X и Y множества элементов различного характера, можно прийти к понятию общей функциональной зависимости, примеры которой встречаются в различных разделах математического анализа. Приведем следующие примеры.

Пример 1. Пусть $y = f(x_1, ..., x_n)$ - вещественная функция n переменных. Тогда X есть множество наборов из n вещественных чисел, Y - множество вещественных чисел.

Пример 2. В теории интегральных уравнений рассматриваются выражения вида

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Предполагается, что функция $K(t,s)$, называемая ядром интегрального уравнения, определена и непрерывна в квадрате $a \le t, s \le b$. Тогда написанное равенство можно рассматривать как некоторый закон, согласно которому каждой функции $x(t)$, непрерывной на $[a,b]$, ставится в соответствие другая функция, непрерывная на том же отрезке.

Дадим теперь общее определение функциональной зависимости.

Определение I.2.1. Пусть даны два произвольных множества *X* и *Y* и дан закон (правило), согласно которому каждому элементу $x \in X$ ставится единственный, вполне определенный элемент $y \in Y$. Будем говорить тогда, что задан оператор $y = f(x)$, определенный на множестве *X*, с областью значений, расположенной в множестве *Y*. В том частном случае, когда значения оператора являются вещественными числами, оператор называется функционалом.

Введем понятие линейного оператора, объекта, изучение свойств которого составляет значительную часть функционального анализа.

Определение I.2.2. Линейным оператором *A*, действующим из одного векторного пространства E_1 в другое векторное пространство E_2, называется соответствие, относящее каждому вектору *x* из E_1 вектор *y* из E_2 так, что:

а) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$;

б) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$; для любых *x*, x_1 и x_2 из E_1 и любого числа λ.

Если E_2 является множеством вещественных чисел, то линейный оператор $A : E_1 \to E_2$ называется линейным функционалом, определенным на векторном пространстве E_1. Если $E_1 = E_2$, то оператор *A* иногда называют линейным преобразованием.

Приведем несколько примеров линейных преобразований.

Пример 1. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство *R* и в нем преобразование, состоящее в повороте *R* вокруг какой-нибудь оси, проходящей через нуль. Каждому вектору *x* ставится в соответствие вектор $A(x)$ полученный из него данным поворотом. Выполнимость условий а) и б) легко проверяется.

Пример 2. Пусть R - евклидово пространство, а R_1 - некоторое его подпространство. Тогда оператор $A: R \to R$, действующий из R в R и ставящий в соответствие каждому вектору $x \in R$ его ортогональную проекцию подпространство R_1, называется оператором ортогонального проектирования. Этот оператор является линейным, условие а), например, означает, что проекция суммы равна сумме проекций.

Пример 3. В пространстве непрерывных функций, заданных на отрезке *[0,1]*, определим оператор A по формуле:

$$Af(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Из свойств интеграла легко следует, что A - линейный оператор.

Среди линейных преобразований обычно выделяют следующее простое преобразование.

Пример 4. Единичный оператор E, ставящий в соответствие каждому вектору этот же самый вектор, т. е. $E(x)=x$.

Рассмотрим понятие пространства операторов.

Пусть A и B - два линейных оператора, действующих из одного линейного пространства E_1 в другое линейное пространство E_2. Определим оператор $\alpha A + \beta B$ по формуле

$$(\alpha A + \beta B)(x) = \alpha A(x) + \beta B(x).$$

Очевидно, что оператор $\alpha A + \beta B$ является также линейным оператором, действующим из пространства E_1 в пространство E_2. Таким образом, во множестве всех линейных операторов можно ввести операции сложения и умножения на числа, которые, как легко видеть, удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства. Это линейное пространство будем называть пространством линейных операторов. Элементами этого пространства являются линейные операторы. Пространство линейных операторов - одно из важнейших понятий функционального анализа.

Понятие обратимого оператора

Может случиться, что линейный оператор A, действующий из векторного пространства E_1 в векторное пространство E_2, обладает следующими свойствами:

1. Если $x_1 \neq x_2$, то $A(x_1) \neq A(x_2)$..

2. Для каждого вектора $y \in E_2$ существует (по крайней мере один) вектор $x \in E_1$ такой, что $A(x) = y$.

В этом случае мы будем говорить, что оператор A обратим. Если A обратим, то можно определить оператор, называемый обратным к A и обозначаемый A^{-1}, следующим образом. Для любого вектора $y_0 \in E_2$ можно найти (по свойству 2), x_0 такое, что $A(x_0) = y_0$. Более того, по свойству 1, x_0 определено однозначно. Тогда положим $A^{-1}(y_0) = x_0$.. Этим соотношением оператор A^{-1} и определяется.

Наиболее простым примером обратимого оператора является единичный оператор. При этом $E^{-1} = E$.

Нулевой оператор не является обратимым, поскольку в этом случае нарушается как условие 1), так и условие 2).

В случае, когда линейный оператор A действует в конечномерном пространстве E, условия существования обратного оператора значительно упрощаются. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема I.2.1. Линейный оператор A, действующий в конечномерном векторном пространстве E, обратим тогда и только тогда, когда из условия $A(x) = 0$ следует, что $x = 0$.

Доказательство. Если оператор A обратим, то из того, что $A(x) = 0$, с очевидностью следует, что $x = 0$. Докажем обратное, что из этого условия следует обратимость оператора. Пусть $x \neq y$. Тогда $x - y \neq 0$ и, следовательно, $A(x - y) \neq 0$. Отсюда, используя линейность оператора A, получаем $A(x) \neq A(y)$, т. е. условие 1) выполнено.

Для доказательства свойства 2) выберем в пространстве E базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Покажем, что $\{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$ также базис пространства E. Достаточно показать линейную независимость этих векторов. Соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A x_i = 0$$

означает, что

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = 0$$

а в силу предположения это влечет равенство $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$.

Поскольку вектора x_i линейно независимые, то все $\alpha_i = 0$, что доказывает линейную независимость векторов Ax_i. Следовательно, каждый вектор $y \in R$ может быть записан в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i A x_i = A\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right),$$

т. е. условие 2) обратимости также выполнено. Теорема доказана.

Пусть в линейном пространстве *E* введено скалярное произведение. Пусть, x_0 - некоторый фиксированный вектор в *E*. Тогда из свойств скалярного произведения легко следует, что отображение, ставящее каждому вектору *x* из *E* число (x, x_0), является линейным функционалом. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема I.2.2. (об общем виде линейного функционала в евклидовом пространстве). Пусть $f(x)$ - линейный функционал, определенный на конечномерном векторном пространстве *E*. Тогда существует элемент $x_0 \in E$ такой, что $f(x) = (x, x_0)$.

Доказательство. Пусть *N* - множество таких $x \in E$, что $f(x) = 0$. В силу линейности функционала $f(x)$, *N* есть подпространство пространства *E*. Если *N*=*E*, то функционал $f(x)$ тождественно равен нулю, и в этом случае $x_0 = 0$. Допустим, $N \neq E$. Тогда в $N^{\perp}$ существует ненулевой вектор y_0. Положим, $x_0 = f(y_0)\|y_0\|^{-2} y_0$. Покажем, что x_0 обладает нужным свойством. Во-первых, если $x \in N$, то $f(x) = 0 = (x, x_0)$, поскольку x_0 так же, как и y_0, ортогонален *N*. Далее, если $x = \alpha y_0$, то

$$f(x) = f(\alpha y_0) = \alpha f(y_0) = \left(\alpha y_0, f(y_0)\|y_0\|^{-2} y_0\right) = (x, x_0).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что любой вектор $x \in E$ представим в виде суммы векторов, один из которых принадлежит *N*, а другой имеет вид αy_0. Но каждый вектор $x \in E$ можно записать в виде

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0\right) + \frac{f(x)}{f(y_0)} y_0,$$

который, очевидно, обладает указанным выше свойством. Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет ввести понятие, играющее важную роль в теории операторов, - понятие сопряженного оператора.

Пусть A - линейный оператор, определенный в конечномерном евклидовом пространстве R. Тогда при каждом фиксированном y выражение (Ax, y) определяет некоторый линейный функционал на R. По предыдущей теореме существует единственный вектор $y' \in R$, такой, что $(Ax, y) = (x, y')$. Определим оператор A^*, который ставит в соответствие вектору y вектор y', т. е. $A^* y = y'$. Оператор A^* будем называть оператором, сопряженным с оператором A. Таким образом, сопряженный оператор определяется соотношением $(Ax, y) = (x, A^* y)$ для любых x и y из R.

Определение I.2.3. Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$.

Самосопряженные операторы являются важным классом линейных операторов, поскольку оказывается, что многие реальные физические процессы описываются посредством операторов такого вида. В настоящий момент теория самосопряженных линейных операторов является наиболее изученной областью функционального анализа.

Введем в пространстве линейных операторов еще одну операцию: операцию умножения операторов.

Пусть A - линейный оператор, действующий из линейного пространства E_1 в линейное пространство E_2, а B - линейный оператор, действующий из пространства E_2 в линейное пространство E_3. Определим линейный оператор BA, действующий из пространства E_1 в пространство E_3 по формуле $BA(x) = B(A(x))$.

Определим еще два важных понятия, связанных с произвольным линейным оператором A, действующим из одного линейного пространства E_1 в другое E_2.

Определение I.2.4. Ядром оператора $A: E_1 \to E_2$ называется совокупность векторов $x \in E_1$, таких, что $A(x) = 0$. Это множество обычно обозначается символом $Ker\,A$.

Определение I.2.5. Образом оператора $A: E_1 \to E_2$ называется совокупность векторов $y \in E_2$, таких, что существует $x \in E_1$ переходящий в y при отображении A. Это множество обычно обозначается символом $Jm\,A$.

I.3. Сходимость в евклидовых пространствах. Линейные нормированные пространства

В предыдущем разделе наличие скалярного произведения в пространстве было использовано для введения понятия сопряженного оператора. Сейчас перейдем к определению и изучению свойств предельного перехода в пространстве со скалярным произведением.

Дадим следующие важные определения.

Определение I.3.1. Последовательность векторов x_n сильно или по норме сходится к вектору *x*, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.

При этом $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ - норма или длина вектора *x*.

Определение I.3.2. Последовательность векторов x_n слабо сходится к вектору *x*, если для любого фиксированного элемента *y*, $(x_n - x, y) \to 0$ при $n \to \infty$.

С помощью неравенства Коши - Буняковского заключаем, что если последовательность x_n сильно сходится к *x*, то она сходится и слабо к *x*. Оказывается, что в конечномерном евклидовом пространстве верно и обратное, т. е. в этом случае понятия сильной и слабой сходимости совпадают.

В евклидовом пространстве, используя скалярное произведение, было введено понятие нормы вектора $\|x\|$, причем, как нетрудно убедиться, справедливы следующие свойства:

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Свойство 3 (неравенство треугольника) было доказано нами раньше, свойства 1 и 2 являются очевидными следствиями свойств скалярного произведения.

Заметим, что определение сильной сходимости формулируется в терминах нормы, а не скалярного произведения.

Таким образом, хотя норма вектора в евклидовом пространстве была введена с помощью скалярного произведения, имеются все предпосылки ввести норму элемента некоторого линейного пространства аксиоматически с помощью свойств 1-3. В связи с этим дадим следующее важное определение.

Определение I.3.3. Линейное пространство E называется нормированным, если в нем каждому вектору x поставлено в соответствие число, называемое нормой x и обозначаемое $\|x\|$, причем это соответствие обладает свойствами 1-3.

Из сказанного видно, что определение сильной сходимости последовательности векторов в евклидовом пространстве дословно переносится на нормированные пространства.

Евклидово пространство является нормированным. Интересен обратный вопрос, когда нормированное пространство является евклидовым, т. е. когда в нормированном пространстве можно так ввести скалярное произведение, что норма, порожденная этим скалярным произведением, совпадает с исходной.

Справедлив следующий факт: если в произвольном нормированном пространстве для любых векторов x и y выполнено соотношение $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$, то функция $(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$ удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения, причем это скалярное произведение порождает исходную норму.

Пример 1. Прямая линия R^1 становится нормированным пространством, если для всякого числа $x \in R^1$ положить

$$\|x\| = |x|.$$

Пример 2. Если в действительном n-мерном пространстве R^n с элементами

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

положить

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\ ,$$

то все аксиомы нормы будут выполнены. Формула

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$$

определяет в R^n метрику.

В этом же линейном пространстве можно ввести норму

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

или норму

$$\|x\|_0 = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$$

Эти нормы определяют в R^n метрики:

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

и

$$\rho_0(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |y_k - x_k|$$

соответственно.

Пример 3. В комплексном пространстве C^n можно ввести норму

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \ .$$

Одним из самых распространенных в математике пространств является линейное нормированное пространство непрерывных функций, заданных на каком-нибудь отрезке конечной длины. Например, на отрезке [0,1]. При этом *x* будет обозначать не элемент пространства, а просто координату точки, принадлежащей данному отрезку.

Для функции $f(x)$ норма определяется равенством:

$$f(x) = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \qquad \text{(I.3.1)}$$

Отметим, что, рассматривая функцию $f(x)$ как элемент линейного пространства, удобнее обозначать ее одной буквой. Справа в (I.3.1) записано, что в качестве нормы надо взять максимальное значение модуля функции при *x*, принадлежащих отрезку [0,1].

Определение I.3.1, действительно удовлетворяет всем требованиям, нормы. Пространство окажется бесконечномерным.

Пространство непрерывных функций, заданных на отрезке, есть пространство в рамках которого изучаются и решаются важные и трудные задачи функционального анализа. Его в общем случае для отрезка $[a,b]$, обозначим: $C[a,b]$, буква C (от слова continuous - непрерывный). Это стандартное обозначение.

Введем норму в пространстве линейных операторов. Пусть H_1 и H_2 - нормированные пространства.

Определение I.3.4. Линейный оператор *A*, действующий из одного нормированного пространства H_1 в другое нормированное пространство H_2, называется ограниченным, если существует постоянная *K*, такая, что

$$\|Ax\|_{H_1} \leq K\ \|x\|_{H_2},$$

для любого вектора $x \in H_1$. Наименьшее из чисел *K*, обладающих этим свойством, называется нормой оператора *A* и обозначается $\|A\|$.

В конечномерном евклидовом пространстве условие ограниченности линейного оператора не является существенным, поскольку справедлива следующая теорема.

Теорема I.3.1. Каждый линейный оператор *A*, действующий в конечномерном евклидовом пространстве *R*, ограничен.

Доказательство. Выберем в *R* ортонормированный базис $\{e_1,...,e_n\}$. Положим $K_0 = \max\{\|Ae_1\|,...,\|Ae_n\|\}$. Так как произвольный вектор *x* может быть записан в виде $x = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$ то, применяя неравенства треугольника и Коши - Буняковского и учитывая, что $\|e_i\| = 1$, получим

$$\|Ax\| = \left\| A\left(\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\right)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}|(x, e_i)| \cdot \|Ae_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}\|x\| \cdot \|e_i\| \cdot \|Ae_i\| \leq K_0\sum_{i=1}^{n}\|x\| = nK_0\|x\|,$$

т. е. nK_0 есть граница для оператора *A*, что и доказывает теорему.

Отметим, что конечномерность пространства *R* существенна для доказательства этой теоремы. В бесконечномерном пространстве эта теорема не верна.

Понятие сходимости, введенное в произвольном нормированном пространстве, позволяет определить понятие непрерывности, играющее важную роль в классическом анализе.

Определение I.3.5. Оператор (не обязательно линейный) *A*, действующий из одного нормированного пространства H_1 в другое нормированное пространство H_2, называется непрерывным в точке x_0, если из того, что в пространстве H_1 последовательность векторов x_n сходится к вектору x_0, следует, что в пространстве H_2 последовательность Ax_n сходится к вектору Ax_0. Если оператор *A* непрерывен на всей области определения, то он называется просто непрерывным.

Для операторов, действующих из нормированного пространства H_1 в другое нормированное пространство H_2, можно дать другое определение непрерывности в точке x_0, эквивалентное выше приведенному определению.

Определение I.3.6. Оператор A, действующий из одного нормированного пространства H_1 в другое нормированное пространство H_2, называется непрерывным в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при $\|x - x_0\|_{H_1} < \delta$, имеем $\|Ax - Ax_0\|_{H_2} < \varepsilon$.

Дадим следующее определение.

Определение I.3.7. Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства H называется ограниченной, если существует такая константа M, что для всех $n, \|x_n\| \le M$.

Утверждение 1. Пусть $\{x_n\}$ последовательность элементов нормированного пространства H сходится к некоторому элементу $x \in H$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

В случае линейных операторов, действующих из одного нормированного пространства H_1 в другое H_2, понятия непрерывности и ограниченности тесно связаны, а именно эти два понятия эквивалентны. Докажем, например, что из ограниченности оператора следует его непрерывность. В самом деле, непосредственно из определения нормы оператора следует, что для любого вектора x линейного пространства H_1 справедливо неравенство

$$\|Ax\|_{H_2} \le \|A\| \, \|x\|_{H_1}.$$

Тогда имеем

$$\|Ax_n - Ax\|_{H_2} = \|A(x_n - x)\|_{H_2} \le \|A\| \, \|x_n - x\|,$$

откуда и следует утверждение.

Принимая во внимание доказанную в этом разделе теорему I.3.1, получим, следующий интересный результат: в конечномерном евклидовом пространстве любой линейный оператор является непрерывным.

Введем еще одно важное понятие.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов евклидова пространства R сходится к элементу x. Тогда согласно неравенству треугольника $0 \le \rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x)$, откуда следует, что $\rho(x_n, x_m) \to 0$, при $n, m \to \infty$. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение I.3.8. Последовательность $\{x_n\}$ элементов евклидова пространства называется фундаментальной, если $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Согласно этому определению мы получили, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. В конечномерном евклидовом пространстве верно и обратное утверждение, носящее название критерия Коши о том, что всякая фундаментальная последовательность в конечномерном евклидовом пространстве сходится.

Определение I.3.9. Евклидово пространство R называется полным, если в нем каждая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Из вышесказанного следует, что любое конечномерное евклидово пространство является полным евклидовым пространством.

ГЛАВА II. БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В данной главе мы перейдем непосредственно к изложению других понятий и фактов функционального анализа, составляющих ее суть. Перечислим также те факты и утверждения первой главы, доказательство которых не зависит от размерности и которые, следовательно, справедливы и в бесконечномерном случае. Также рассмотрим методы функционального анализа применяемые в некоторых областях прикладной математики.

II.1. Бесконечномерная теории и ее особенности

Специфика бесконечномерного случая, ее особенности, отличают бесконечномерную теорию от конечномерной.

В доказательстве неравенства Коши - Буняковского были использованы только аксиомы скалярного произведения и, следовательно, ее можно перенести без изменений на бесконечномерный случай. Справедливость неравенства Коши - Буняковского позволила определить понятия нормы вектора и угла между векторами. Исходя из вышесказанного, заключаем, что эти геометрические понятия естественным образом переносятся и на случай бесконечномерных пространств.

Непрерывность скалярного произведения является также следствием неравенства Коши - Буняковского, и, следовательно, этот факт справедлив в теории бесконечномерных евклидовых пространств.

Понятие ортогональности в общем случае может быть определено совершенно аналогично тому, как оно было определено в конечномерном случае, и что процесс ортогонализации выполняется и в общей, бесконечномерной ситуации.

Наличие скалярного произведения позволяет ввести понятие сходимости в произвольном евклидовом пространстве.

Любое конечномерное евклидово пространство является полным метрическим пространством, и этот факт является существенным обстоятельством в конечномерном случае. В бесконечномерном случае оказывается возможным, что последовательность векторов $\{x_n\}$ такова, что $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, и тем не менее нет такого вектора x, для которого $\|x_n - x\| \to 0$. Для того чтобы исключить эту возможность, в бесконечномерном линейном евклидовом пространстве приходится требовать условие полноты. Различными становятся в бесконечномерном случае понятия поточечной и равномерной сходимостей последовательности операторов.

Введем понятие бесконечной линейно независимой системы векторов.

Определение II.1.1. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ векторов линейного пространства называется линейно независимой, если линейно независима любая ее конечная подсистема векторов.

В дальнейшем для простоты изложения в бесконечномерном случае потребуем, чтобы линейное евклидово пространство было сепарабельным, т. е. чтобы в нем имелась счетная система векторов, обладающая тем свойством, что любой вектор нашего пространства может быть сколь угодно точно аппроксимирован по норме векторами этой системы.

Поскольку в конце первой главы введено общее понятие сходимости в нормированном пространстве, то имеет смысл говорить о бесконечном базисе евклидова пространства.

Определение II.1.2. Линейно независимая система векторов $e_1, e_2, \ldots$ называется базисом евклидова пространства *R*, если любой вектор $x \in R$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

где ряд справа понимается как предел последовательности частичных сумм $S_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$ при $N \to \infty$ в смысле сходимости, определенной в данном пространстве.

Теорема о независимости числа элементов базиса от выбора базиса в бесконечномерном случае может быть переформулирована следующим образом.

Теорема II.1.1. Любой базис сепарабельного бесконечномерного евклидова пространства состоит из счетного числа элементов.

Специфика бесконечномерного случая начинает появляться при рассмотрении подпространств, функционалов и операторов.

Известно, что в конечномерном евклидовом пространстве любое линейное многообразие замкнуто (в смысле определения замкнутого множества в евклидовом пространстве). В бесконечномерном случае этот факт, вообще говоря, несправедлив. Естественные обобщения утверждений, сделанных в конечномерном случае, получаются, если потребовать условие замкнутости. Дадим следующее определение.

Определение II.1.3. Подпространством R_1 бесконечномерного евклидова пространства R называется линейное многообразие (т. е. если $x, y \in R_1$, то для любых α *и* β, $\alpha x + \beta y \in R_1$), которое является замкнутым, если его рассматривать как подмножество евклидова пространства R.

При таком определении подпространства останется справедливой теорема об ортогональном разложении полного пространства R на два пространства - R_1 и $R_1^{\perp}$.

Отметим, что операция построения ортогонального дополнения дает способ получения подпространств в евклидовом пространстве R. В самом деле, пусть M - произвольное подмножество R. Из свойств скалярного произведения следует, что $M^{\perp}$ - линейное многообразие, поскольку если x_1 и $x_2 \in M^{\perp}$, то для любого y из M имеем

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y) = 0,$$

т.е. $\alpha x_1 + \beta x_2 \in M^{\perp}$. Но из непрерывности скалярного произведения следует, что $M^{\perp}$ замкнуто. В самом деле, пусть последовательность $\{x_n\}$ векторов из $M^{\perp}$ сходится по норме к некоторому вектору x из R. Для доказательства замкнутости $M^{\perp}$ достаточно показать, что $x \in M^{\perp}$. Так как для любого вектора y из M имеем

$$(x, y) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n, y\right) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y) = 0$$

то это и доказывает утверждение замкнутости $M^{\perp}$.

В конечномерном случае было доказано, что каждый линейный оператор является непрерывным. Как уже отмечалось, это утверждение становится, вообще говоря, неверным в пространствах бесконечной размерности. Для того чтобы сохранить справедливыми формулировки основных результатов конечномерной теории для операторов, необходимо потребовать условие ограниченности линейного оператора (функционала). При этом ограничении остается в силе утверждение об общем виде линейного функционала в евклидовом пространстве, которое утверждает, что в евклидовом пространстве любой непрерывный линейный функционал единственным образом представим в виде (x, x_0).

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $C[a,b]$, где норма функции $f(x)$ определяется по формуле

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

функционал

$$F_g(f(x)) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx.$$

где $g(x)$ - некоторая фиксированная функция из $C[a,b]$. В данном случае, F_g - линейный ограниченный функционал и его норма равна

$$\|F_g\| = \int_a^b |g(x)|dx..$$

Используя теорему об общем виде линейного функционала в полном евклидовом пространстве совершенно аналогично тому, как это сделано в главе I, для любого ограниченного линейного оператора A вводится понятие сопряженного оператора $A*$.

Со значительными трудностями приходится сталкиваться при изучении в бесконечномерном евклидовом пространстве понятия обратимости линейного оператора. Становится неверным утверждение о том, что линейный оператор A обратим тогда и только тогда, когда из условия $A(x)=0$ следует, что $x=0$. Более того, даже если известно, что обратный оператор существует, нетривиальным становится вопрос о его непрерывности.

Важным моментом при изучении линейных операторов и функционалов в бесконечномерном случае является вопрос о том, можно ли определенный не на всем пространстве оператор или функционал продолжить на все пространство с сохранением его нормы. Оказывается, что линейный ограниченный функционал, определенный на любом линейном многообразии (даже одномерном), можно, и при том, сохранив его норму, продолжить на все пространство, т. е. определить его на каждом векторе бесконечномерного пространства.

II.2. Гильбертово пространство и полные пространства

Этот раздел посвящен понятию гильбертова пространства, которое, как уже было отмечено, является обобщением понятия конечномерного евклидового пространства. Также здесь рассматриваются некоторые свойства полных пространств.

Изучим некоторые дополнительные факты, присущие бесконечномерным пространствам. Прежде чем перейти к точным математическим формулировкам, отметим, что возникновение понятия гильбертова пространства связано не только с логикой внутреннего развития математической теории (обобщение конечномерного случая). Как и большинство глубоких математических теорий, введение этого понятия продиктовано практикой, а именно теорией интегральных уравнений, описывающих разнообразные реальные процессы. Более того, теория гильбертовых пространств и операторов в них оказалась столь замечательной, точно отражающей реально существующие связи природы математической моделью, что явилась источником, возникновения новых открытий в физических науках. Создание этой теории было названо «одним из самых замечательных предвидений в истории математической физики». Работы Гильберта, основателя этой теории, появились до работ Гейзенберга, Шредингера и других авторов, посвященных квантовой механике - разделу науки, в котором теория операторов в гильбертовом пространстве играет исключительную роль.

Перейдем теперь к точным математическим формулировкам.

Определение II.2.1. Гильбертовым пространством называется бесконечномерное евклидово пространство, полное относительно нормы, порожденной введенным в этом пространстве скалярным произведением.

Определение II.2.2. Систему векторов гильбертова пространства H назовем полной в H, если она порождает все пространство, т. е. если произвольный элемент H может быть сколь угодно точно приближен по норме элементами этой системы или их линейными комбинациями.

В дальнейшем, будут рассмотрены только сепарабельные гильбертовы пространства, хотя это ограничение часто не является существенным, и почти все основные факты теории гильбертовых пространств могут быть перенесены и на случай несепарабельных гильбертовых пространств.

Применяя процесс ортогонализации к произвольной полной системе векторов, мы получим полную ортонормированную систему.

Если данная ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ полна, то в H не существует ни одного вектора, не равного нулю, ортогонального всем векторам системы.

Действительно, допустим, что для некоторого вектора $\psi \neq 0$ выполнены равенства: $(\psi, \varphi_k) = 0, k = 1,2,\ldots$.

В силу свойств скалярного произведения и непрерывности этой операции заключаем, что ортогональное дополнение к вектору ψ содержит все векторы φ_k, все линейные комбинации этих векторов и все векторы, которые могут быть сколь угодно точно приближены по норме линейными комбинациями этих векторов, т. е. все пространство H. В частности, $(\psi, \psi) = 0$, откуда $\psi = 0$, что противоречит допущению.

Оказывается, что справедливо и противоположное утверждение, которое заключается в том, что если ортонормированная система не полна, то существует ненулевой вектор ϕ, ортогональный всем векторам этой системы.

В качестве примера гильбертова пространства рассмотрим пространство l_2, векторами которого являются последовательности чисел $(x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

где операции сложения и умножения на числа определяются покомпонентно, а скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$ - по формуле

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i .$$

Пространство l_2 является сепарабельным гильбертовым пространством. В качестве счетного всюду плотного множества в l_2 можно взять, например, совокупность всех последовательностей с конечным числом отличных от нуля рациональных членов.

Проиллюстрируем на примере l_2 специфические особенности бесконечномерных пространств.

Рассмотрим в пространстве l_2 совокупность всех векторов, у которых, начиная с некоторого номера, все компоненты равны нулю. Совокупность таких векторов образует, очевидно, линейное многообразие, не совпадающее со всем пространством l_2. С другой стороны, это многообразие не является замкнутым, поскольку, очевидно, любой элемент пространства l_2 может быть сколь угодно точно приближен по норме элементами данного линейного многообразия.

Рассмотрим в пространстве l_2 оператор, который переводит произвольный вектор $x=(x_1, x_2, ...)$ в вектор $y=(0, x_1, x_2, ...)$. Очевидно, что это линейный ограниченный оператор. Ядро этого оператора есть нулевое подпространство, но в отличие от конечномерного случая этот оператор тем не менее не является обратимым, поскольку при этом отображении не существует, например, никакого вектора x, переходящего в вектор $(1,0,0,...)$, т. е. образ этого оператора не совпадает со всем пространством l_2.

Определим в пространстве l_2 оператор *A* по формуле

$$A[(x_1, x_2, ...)] = (x_1, 2x_2, ..., nx_n, ...).$$

Оператор A действует из l_2 в l_2 и определен не на всем пространстве, а только на линейном многообразии векторов *x*, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nx_n)^2 < \infty.$$

Оператор A линеен, но не непрерывен. Например, последовательность $e_1 = (1,0,...), e_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, ...\right), ..., e_n = \left(0, ..., \frac{1}{n}, ...\right)$ сходится к нулю в метрике l_2 а последовательность $Ae_1 = (1,0,...), ..., Ae_i = (0,...,1,...)$ к нулю не сходится.

Рассмотрим теперь несколько подробнее понятие базиса в гильбертовом пространстве.

Очень важным вопросом при изучении полных систем $\{e_i\}$ является вопрос о том, образует ли данная система базис пространства, т. е. можно ли любой элемент *x* из пространства представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i.$$

и притом однозначно (здесь ξ_i числа). Если пространство имеет базис, то оно, очевидно, сепарабельно. В качестве счетного всюду плотного множества можно выбрать, например, совокупность всех векторов с конечным числом отличных от нуля рациональных координат. Оказывается, что в гильбертовом пространстве верно и обратное утверждение, что во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве существует базис. Более того, в этом случае базисом является любая полная ортонормированная система. Коэффициенты ξ_k при этом легко определяются, поскольку $\{e_i\}$ - ортонормированная система. В самом деле,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i .$$

Тогда,

$$\left(x, e_k\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, e_k\right) = \xi_k .$$

Кроме того, для коэффициентов ξ_i оказывается справедливо равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 ,$$

которое является обобщением теоремы Пифагора на случай бесконечной ортонормированной системы векторов и которое носит название равенства Парсеваля.

Одним из замечательных факторов физической реальности является свойство устойчивости, заключающееся в том, что многие характеристики, присущие некоторому данному объекту, оказываются справедливыми и для объектов, в каком-то смысле несильно отличающихся от исходного. Поскольку большинство математических моделей являются идеализацией реально существующих процессов, то свойство устойчивости присуще и многим математическим объектам. По этой причине в современной математике широкое распространение получили разнообразные методы теории возмущений, суть которых заключается в том, что изучается некоторая более простая для исследования модельная задача, затем определяется класс в каком-то смысле близких (возмущенных) задач и по характеристикам модельной задачи делаются выводы о характеристиках возмущенных задач. Этот прием позволяет изучать реальные физические процессы, которые можно рассматривать как некоторые «возмущения» идеальных моделей.

Докажем теорему, иллюстрирующую вышесказанное. При доказательстве этой теоремы широко используются также методы теории гильбертовых пространств, развитые выше.

Определение II.2.3. Системы $f_1, f_2,\dots$ и $g_1, g_2,\dots$ называются квадратично близкими, если

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n - g_n\|^2 < 1.$$

Теорема II.2.1. Если $\varphi_1,\varphi_2,\dots$ - ортонормированный базис в гильбертовом пространстве *H*, а $f_1, f_2,\dots$ - ортонормированная система векторов, квадратично близкая к базису $\varphi_1,\varphi_2,\dots$, то $f_1, f_2,\dots$ также ортонормированный базис пространства *H*.

Доказательство. Предположим, что система $f_1, f_2,\dots$ не базис, следовательно, она не полна. Тогда существует ненулевой вектор h, ортогональный всем. Разложим вектор h по базису $\varphi_1,\varphi_2,\dots$.

Поскольку $\varphi_1,\varphi_2,\dots$ - базис, то справедливо равенство Парсеваля:

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(h,\varphi_n)^2.$$

В силу ортогональности вектора h всем f_i неравенства Коши - Буняковского и условия квадратичной близости систем $f_1, f_2,\dots$ и $\varphi_1,\varphi_2,\dots$ имеем

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(h,\varphi_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(h,\varphi_n - f_n)^2 \le \|h\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n - f_n\|^2 < \|h\|^2.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

В первой главе было дано общее определение нормированного пространства. В произвольном нормированном пространстве можно определить расстояние между его элементами по формуле

$$\rho(x,y) = \|x - y\|.$$

Непосредственно из определения нормированного пространства следует, что так введенная функция $\rho(x,y)$ сохраняет свойства обычного расстояния в трехмерном пространстве, о которых говорилось выше. При этом, определения открытых, замкнутых множеств, базиса, полноты системы векторов, сепарабельности, фундаментальности последовательности элементов, данные применительно к евклидовым пространствам, имеют смысл и в нормированном пространстве. В случае бесконечномерного нормированного пространства для получения наиболее глубоких результатов также приходится требовать условия полноты.

Определение II.2.4. Бесконечномерное нормированное пространство, полное в смысле метрики, порожденной нормой этого пространства, называется банаховым пространством.

Пространство названо так в честь польского математика С. Банаха, впервые начавшего систематически изучать такие пространства.

В качестве примера бесконечномерного банахова пространства рассмотрим пространство $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число, где расстояние между двумя элементами определяется по формуле

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|,$$

а норма, следовательно, по формуле

$$\|x(t)\|=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|.$$

Пространство $C[a,b]$ не является гильбертовым пространством, поскольку, в нем не выполняется правило параллелограмма, например, для функций $\sin t$ и $\cos t$.

Свойства полных пространств

Исследуем некоторые свойства, присущие гильбертовым и банаховым пространствам и связанные с полнотой этих пространств. Отметим прежде всего так называемый принцип вложенных шаров - утверждение, обобщающее известную лемму из анализа о вложенных отрезках.

Теорема II.2.2. (Принцип вложенных шаров). Всякая последовательность замкнутых, вложенных друг в друга шаров в банаховом (гильбертовом) пространстве, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

Основным этапом при доказательстве этой теоремы является проверка фундаментальности последовательности x_n - центров вложенных шаров. Тогда в силу полноты пространства последовательность x_n сходится к некоторому элементу *x*. Отсюда, используя замкнутость шаров, уже нетрудно заключить, что именно этот элемент *x* принадлежит всем шарам, фигурирующим в условии теоремы.

Значительное место при математических исследованиях занимают различного рода теоремы существования. При изучении различных реальных процессов часто существование того или иного изучаемого процесса является очевидным фактом. При изучении же математических моделей различных процессов следует учитывать, что математическая модель является только приближенной копией реально существующего объекта. При этом строгое математическое доказательство теоремы существования является лишним доказательством, что данной математической модели можно «доверять», что данная математическая идеализация является правильной. Мощным методом доказательства теорем существования являются различные теоремы о неподвижных точках некоторых отображений.

Принцип сжимающих отображений

Рассмотрим принцип сжимающих отображений, имеющий большое применение в математическом анализе, алгебре, теории операторных (дифференциальных и интегральных) уравнений.

Опишем сначала его с помощью примеров.

Пример 1. Дан сегмент $[a, b]$. Проведем его сжатие:

т.е. концы сдвинутся в новые точки a_1, b_1. точки занимавшие положение a_1, b_1 переместятся в точки a_2, b_2 и т.д. Можно предположить, что на $[a, b]$ найдется такая точка c, которая при его сжатии останется неподвижной. То есть каждой точке $x \in [a,b]$ ставится в соответствие некоторая точка $f(x) \in [a,b]$, являющаяся отображением точки x. Неподвижная точка, если она существует, удовлетворяет равенству:

$$x = f(x).$$

Пример 2. Пусть на $[a, b]$ задано множество X функций $f(x)$, таких что

$$|f(x)| \leq M, \ \ x \in [a,b], \ \ M > 0.$$

Функция $f(x) \in X$ назовем точкой множества X, если каждой точке $f \in X$ поставлено в соответствие некоторая точка $Af \in X$, то говорят что задано отображение A множества X на себя.

1) [0, 1]; функции $\{1, x, x^2, \ldots\} \in X$ поставим в соответствие функции x^k функцию x^{k+1}. Тогда $Af = x^2 f$.

Определение II.2.5. Отображение A, заданное в метрическом пространстве X, называется сжимающим, если:

1) $Ax \in X$;

2) $\forall x, y \in X$ выполняется неравенство:

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y),$$

где $0 < \alpha < 1$, α не зависит от x и y.

Теорема II.2.3. (Банаха). Сжимающее отображение A полного метрического пространства X в себя имеет одну и только одну неподвижную точку, т.е. $\exists x_0 \in X,\ Ax_0 = x_0$ - единственное решение, которое можно найти методом итераций.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ произвольная точка пространства X. Положим что $x_1 = Ax_0;\ x_2 = Ax_1;\ldots;\ x_n = Ax_{n-1};\ldots$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальна, т.е. сходится в себя. Замечая, что

$$\underline{\rho(x_1, x_2)} = \rho(Ax_0, Ax_1) \le \alpha\rho(x_0, x_1) = \underline{\alpha\rho(x_0, Ax_0)};$$

$$\underline{\rho(x_2, x_3)} = \rho(Ax_1, x_2) \le \alpha\rho(x_1, x_2) \le \alpha \cdot \alpha\rho(x_0, Ax_0) = \underline{\alpha^2\rho(x_0, Ax_0)};$$

$$\ldots;\ \rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n \rho(x, Ax);\ \ldots$$

Далее

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le$$
$$\le \alpha^n\rho(x, Ax) + \alpha^{n+1}\rho(x, Ax) + \ldots + \alpha^{n+p-1}\rho(x, Ax) =$$
$$= \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1}\right)\rho(x, Ax) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x, Ax);$$

Так как,

$$(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1}) = \alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{p-1}) =$$

$$= \alpha^n\left(\frac{-\alpha^p + 1}{1-\alpha}\right) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}$$

Так как по условию $\alpha < 1$, то

$$\underline{\rho(x_n, x_{n+p})} \le \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x, Ax) < \underline{\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax)}.$$

Отсюда следует, что $\rho(x_n, x_{n+p}) \xrightarrow{n\to\infty} 0;\quad p > 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists N(\varepsilon);\ \forall n \ge N(\varepsilon);\ \forall p \ge 0\ (p \in Z):\ \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon.$$

Иначе $\{x_n\}$ – фундаментальна. В силу полноты пространства X следует, что предел $\{x_n\}$ существует и принадлежит X, т.е. $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Докажем, что $x_0 \in X$ есть неподвижная точка отображения A, или $Ax_0 = x_0$. Имеем:

$$\rho(x_0, Ax_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) = \rho(x_0, x_n) + \rho(Ax_{n-1}, Ax_0) \le$$

$$\le \rho(x_0, x_n) + \alpha\rho(x_{n-1}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon,$$

так как $\varepsilon > 0$ - произвольное, то $\rho(x_0, Ax_0) = 0 \Rightarrow Ax_0 = x_0$.

Докажем единственность неподвижной точки. Пусть существуют две неподвижные точки. Тогда $Ax_0 = x_0$, $A\overline{x_0} = \overline{x_0}$. Расстояние

$$\rho(x_0, \overline{x_0}) = \rho(Ax, A\bar{x}) \le \alpha\rho(x_0, \overline{x_0}),$$

что возможно при $\rho(x_0, \overline{x_0}) = 0$, т.к. $\alpha < 1$. Следовательно $x_0 = \overline{x_0}$. Теорема доказана.

Из многочисленных применений принципа сжимающих отображений укажем одно применение в алгебре.

Рассмотрим алгебраическое или трансцендентное уравнение

$$x - f(x) = 0 \tag{II.2.1}$$

Пусть $f(x)$ – непрерывна, дифференцируема в $[a, b]$ и удовлетворяет условиям:

$$f(x) \in [a, b], \forall\, x \in [a, b];\ |\, f'(x)\, | \le k < 1.$$

В этих условиях (II.2.1) имеет в $[a, b]$ единственный действительный корень. Докажем это методом сжимающих отображений. Для этого рассмотрим R как полное пространство с метрикой $\rho(x, y) = |\, x - y\, |$ отображаемое в себя. Положим $Ax = f(x)$. Если будет доказано, что отображение является сжимающим, то автоматически будет доказано, существование единственной неподвижной точки x, или другими словами, существование единственного действительного корня уравнения:

$$x = Ax = f(x).$$

Имеем:

$$\rho(Ax, Ay) = |Ax - Ay| = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \le k|x - y| =$$
$$= k\rho(x, y).$$

$\Rightarrow$ т. к. $k < 1$, то по условию отображение есть сжимающее. Следовательно, уравнение (II.2.1) имеет единственный корень.

Отметим, что доказанный нами принцип сжимающих отображений приводит не только к существованию неподвижной точки, но и дает конкретный метод приближенного нахождения этой точки. Это обстоятельство часто применяется на практике, и процедура нахождения неподвижной точки, использующая принцип сжимающих отображений, носит название метода последовательных приближений. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 3. Нахождение корней уравнений. Пусть $\varphi(t), -\infty < t < +\infty$ - действительная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le \theta |t_1 - t_2|,\ 0 < \theta < 1$$

и отображающая вещественную прямую R в себя. Определив для любых x и y из R расстояние по формуле

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

получим полное (в силу критерия Коши) нормированное пространство и сжимающее отображение в нем. Значит, числовая последовательность $t_0, t_1 = \varphi(t_0), \ldots$ сходится к единственному корню уравнения $t = \varphi(t)$, где t_0 - любое число из R.

Пример 4. Существование и единственность решения интегрального уравнения. Пусть задано интегральное уравнение

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi)) d\xi,$$

где функция $f(t, y)$ непрерывна на множестве $a \le t \le b$ и удовлетворяет условию Липшица по y, т. е.

$$|f(t, y') - f(t, y'')| \le K |y' - y''|,$$

а точка t_0 - внутренняя точка отрезка $[a, b]$.

Введем банахово пространство $C[a, b]$ и определим отображение в нем по правилу:

$$g(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi)) d\xi,$$

Тогда видно, что нахождение решения интегрального уравнения сводится к нахождению неподвижной точки этого отображения. Поскольку из условия Липшица следует, что

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le K |y_1 - y_2| \le K \rho(y_1, y_2),$$

где $\rho(y_1, y_2)$ - метрика в $C[a, b]$, то отображение сжимающее, если отрезок $[a, b]$ достаточно мал, так что $K(b - a) = \theta < 1$.

Дифференцирование и операторы в линейных нормированных пространствах

Рассмотрим в $C[0,1]$ операции дифференцирования.

Всякая функция, которую можно дифференцировать, заведомо непрерывна и ее можно рассматривать как элемент $C[0,1]$. Операция дифференцирования, как следует из ее определения, линейна.

Продифференцируем для наглядности только полиномы - x^n.

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

Определим норму x^n в пространстве $C[0,1]$. Очевидно, для любого *n* будем иметь $\|x^n\| = 1$.

Условимся обозначать операцию дифференцирования через *D*, т. е. вместо *A* будем писать *D*. Так что

$$Dx^n = nx^{n-1}.$$

Для изучения нормы соответствующего оператора можно рассмотреть

$$\max_f \frac{\|Df\|}{\|f\|}$$

где в множество допустимых элементов $f \in C[0,1]$ входят все функции, на которых оператор *D* определен. В это множество входят все элементы набора (II.1.3), где

$$\frac{\|Dx^n\|}{\|x^n\|} = n - 1$$

и никакого максимума не существует, т. е. он равен бесконечности. Итак, в бесконечномерном линейном пространстве существуют неограниченные линейные операторы, норма которых обращается в бесконечность. И к таким неограниченным операторам принадлежит классическая операция дифференцирования.

Таким образом, исходным объектом является некоторое уравнение. Левой части его сопоставляется оператор в подобранном соответствующим образом пространстве функций - неизвестных. А затем изучение ведется с использованием тех или иных методов и результатов теории операторов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{du}{dx} = ku \qquad \text{(II.2.2)}$$

Здесь $u = u(x)$ - неизвестная функция аргумента $x \in [0,1]$, а k - некоторое число.

Положим пока в (II.2.2) k=1 и найдем решение в классе аналитических функций. Для этого напишем ряд

$$u(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots \qquad \text{(II.2.3)}$$

подставим этот ряд в уравнение (II.2.2) и будем определять неизвестные нам числа u_k, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях.

Для определения коэффициентов u_k получим цепочку равенств:

$$u_1 = u_0, u_2 = \frac{u_1}{2}, u_3 = \frac{u_2}{3}, \ldots, u_n = \frac{u_{n-1}}{n}, \ldots$$

Теперь, чтобы вычислить все коэффициенты, достаточно задать u_0, или, что то же самое, значение неизвестной функции $u(x)$ при x=0. Положим

$$u_0 \equiv u(0) = 1 \qquad \text{(II.2.4)}$$

тогда

$$u_0 = u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}, \ldots, u_n = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}, \ldots$$

где $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!$. Полагая 0! = 1, компактно запишем полученный ряд (II.2.3):

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{(II.2.5)}$$

Рассматривая для этого ряда, частичные суммы, можно убедиться, что ряд этот сходится для любых, значений $x \in [0,1]$ (да и вообще для любого конечного значения аргумента x) и, следовательно, определяет некоторую функцию $u(x)$ аналитическую, которая и будет решением уравнения (II.2.2) при k=1.

Простейший пример сходящегося ряда дает геометрическая прогрессия со знаменателем $q, |q| < 1$. Соответствующий ряд - числовой, т. е. все φ_k - суть числа. Для прогрессии

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} \to \frac{1}{1 - q}$$

при $n \to \infty$, сходимость очевидна. Если же S - произвольный числовой ряд

$$S = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

для которого при достаточно больших *n* выполняется неравенство

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q < 1$$

то сравнение его частичных сумм с суммами для геометрической прогрессии позволяет без труда установить сходимость. Это так называемый признак Даламбера сходимости ряда.

В ряде (II.2.5)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} < \frac{1}{2}$$

для любого фиксированного *x* при достаточно большом *n*. Следовательно, для любого заданного *x*: ряд (II.2.5) определяет некоторое число - значение функции $u(x)$ для заданного *x*. Итак, исследуемый ряд определяет некоторую функцию. Если продифференцировать каждый член ряда (II.2.5) и полученные результаты сложить, то получится снова тот же ряд.

Теперь выясним природу функции, определяемой рядом (II.2.5). Если записать ряд (II.2.5) еще и для функции $u(y)$ и ряды перемножить (так, как перемножают многочлены), то после соответствующих преобразований получится равенство

$$u(x)u(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \qquad \text{(II.2.6)}$$

дающее теорему сложения:

$$u(x)u(y) = u(x+y) \qquad \text{(II.2.7)}$$

Проверить равенство (II.2.6), можно воспользовавшись тождеством:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(1 + y + \frac{y^2}{2}\right) = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2}.$$

Далее пользуемся индукцией и формулой для $(x+y)^n$ - формулой бинома Ньютона.

Обозначим значение функции $u(x)$ при x=1 через *e*, $u(1) = e$. Это иррациональное число.

Заметим теперь, что поскольку для любого целого положительного n

$$u(nx) = u(x) \cdot u(x) \cdot \ldots \cdot u(x) = [u(x)]^n \qquad \text{(II.2.8)}$$

должно быть справедливо равенство

$$u(n) = e^n .$$

Для доказательства достаточно в (II.2.8) положить x=1. А если $p = \frac{n}{m}$ - произвольное положительное число, являющееся рациональным, то

$$[u(p)]^m = u[mp] = u[n] = e^n$$

и

$$u(p) = e^{\frac{n}{m}} = e^p .$$

Мы доказали, таким образом, равенство

$$u(x) = e^x \qquad \text{(II.2.9)}$$

для любых положительных рациональных x. Но

$$u(x) \cdot u(-x) = u(x - x) = u(0) = 1$$

и

$$u(-x) = e^{-x} .$$

Следовательно, (II.2.9) верно и без предположения положительности рационального x. Равенство (II.2.8) или равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \text{(II.2.10)}$$

верно вообще для всех вещественных x, а также для любых комплексных значений аргумента... Если z - произвольное комплексное число, то равенство

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x$$

принимается за определение функции e^z. Можно и для вещественных x принять ряд (II.2.5) за определение функции e^x.

Сформулируем полученные результаты на языке спектральной теории. Мы рассмотрели уравнение (II.2.2) в предположении $k = 1$. Повторяя рассуждения, можно проверить, что для любого k решение при дополнительном условии (II.2.4) имеет вид $u = e^{kx}$. А произвольное решение, как это следует, например, из наших замечаний относительно коэффициента u_0 в ряде (II.2.3), запишется в виде

$$u = ce^{kx}$$

где c - произвольный постоянный множитель.

Тогда, если воспользоваться терминологией первой части, получается, что любое k - собственное значение оператора D и e^{kx} - соответствующий собственный вектор, определенный, как и в двухмерном случае, с точностью до постоянного множителя.

Возможность такой интерпретации показывает отличие от конечномерного случая. Таким образом, налицо правомерность того, что функция e^{kx} - собственный вектор.

Проведенное рассуждение верно в предположении, что мы отказались от условия (II.2.4). Обратим внимание, что это условие и не годится для рассмотрений, используемых в спектральной теории. В них предполагается, что решения однородного уравнения

$$Au - ku = 0$$

(уравнения, для которого вектор $u \equiv 0$ всегда является решением), в свою очередь, образуют линейное пространство. Такие решения можно складывать и умножать на числа снова получая решение. Если же $u(x)$ удовлетворяет условию (II.2.4), то $3u(0) = 3$, и функция $3u$ в качестве решения уравнения (II.2.2), подчиненного условию (II.2.4), уже не годится.

С этой точки зрения единственным пригодным дополнительным условием, выделяющим единственное решение уравнения (II.2.2), является условие

$$u(0) = 0 \qquad \text{(II.2.11)}$$

Но при этом условии для любого k единственным является решение $u \equiv 0$. И в определенном нами смысле ни собственных значений, ни собственных векторов вообще нет. Такое возможно опять-таки только в бесконечномерном случае.

Приведенные выше рассуждения, связанные с использованием различных дополнительных условий, присоединяемых к уравнению, приводят к важному заключению. С классической операцией $\dfrac{d}{dx}$, определенной для всех дифференцируемых функций из $C[0,1]$, могут быть связаны различные операторы. Так, если сохранить обозначение D за оператором в уравнении (II.2.2) без каких-либо условий вида (II.2.4) или (II.2.11), то, подчинив решения условию (II.2.10), соответствующий оператор надо обозначить, например, через D_0. Операторы D, D_0, хотя и порождаются одной и той же операцией, отличаются различными областями определения: для оператора D это все дифференцируемые функции, а для D_0 - дифференцируемые функции, подчиненные дополнительному условию (II.2.11). Такое различие приводит к существенной разнице в свойствах D, D_0.

Дальнейшие исследования проведем с помощью методов комплексного анализа.

Положим в (II.2.2) $k = i = \sqrt{-1}$ и заметим, что в этом случае при дополнительном условии (II.2.3) решение нашего уравнения будет иметь вид

$$u = e^{ix} \tag{II.2.12}$$

В соответствии с определением производной, найдем предел отношения при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Сначала преобразуем числитель дроби:

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x = \sin x(\cos\Delta x - 1) + \cos x \cdot \sin\Delta x.$$

Заметим теперь, что при малых значениях δ имеет место формула

$$\sqrt{1-\sigma} \approx 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Ошибка имеет порядок δ^2 (равенство $\sqrt{1-\sigma} = 1 - k\delta$ можно возвести в квадрат и найти k). Следовательно,

$$1 - \cos\Delta x \approx \frac{(\sin\Delta x)^2}{2}.$$

Кроме того, для малых углов $\sin x \approx x$ (мера углов в анализе всегда радианная) и, следовательно,

$$\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \to 1$$

при $\Delta x \to 0$.

Окончательно

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогично найдем

$$(\cos x)' = \sin x.$$

Если положить

$$\nu(x) = \cos x + i \sin x,$$

то

$$\frac{d}{dx}\nu(x) = (\cos x + i \sin x)' = -\sin x + i \cos x = i \cdot (\cos x + i \sin x) = i\,\nu(x).$$

Таким образом, найдено еще одно решение уравнения (II.2.2) при $k=i$, отличное от решения (II.2.13). И оно опять удовлетворяет условию (II.2.4):

$$\nu(0) = 1.$$

При выполнении условия (II.2.3) решение (II.2.12) – единственное.

Справедливо следующее равенство, известное как формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \text{(II.2.13)}$$

Способ получения равенства (II.2.13) основывается на единственности решения уравнения (II.2.2) при условиях (II.2.4). Непосредственно из построений такая единственность следует для аналитических решений. Строго говоря, следует убедиться в аналитичности функций, как синус и косинус. Либо нужно установить единственность решения задачи (II.2.2) - (II.2.4) при более широких, как говорится, предположениях, позволяющих применить результат к нашему случаю.

Запишем теперь ряд (II.2.4), подставляя в него ix вместо x, а потом разделим вещественную и мнимую части и получим ряды представляющие функции $\cos x$ и $\sin x$.

Рассмотрим следствие равенства (II.2.13). Из этого равенства следует, что e^{ix} является 2π - периодической функцией.

Изучим периодические решения уравнения (II.2.2). Заменим отрезок $[0,1]$ отрезком $[0, 2\pi]$, отыскивая решения, подчиненные условию

$$u(0) = u(2\pi) \qquad \text{(II.2.14)}$$

Отметим сразу, что оно, как и условие (II.2.11), относится к типу однородных условий, используемых в спектральной теории.

Записав условия (II.2.14) для решения ce^{ikx} уравнения (II.2.2), получим равенство

$$e^{2\pi i k} = 1 \qquad \text{(II.2.15)}$$

где произвольный постоянный множитель несущественен. Условие (II.2.15) будет выполняться при произвольных целых значениях параметра

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(II.2.16)}$$

При этих и только при этих значениях k настоящая задача (II.2.2), (II.2.14) будет иметь нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение. Это делает его похожим на конечномерный случай. Значения k в (II.2.16) будут собственными значениями.

Совокупность этих собственных значений дает спектр оператора D_n - операции дифференцирования, рассматриваемой на периодических функциях. А экспоненты e^{ikx} при тех же значениях k из цепочки (II.2.16) будут собственными функциями, определенными, как всегда, с точностью до постоянного множителя).

Встает следующий вопрос: «Как представить произвольный элемент из $C[0,2\pi]$ линейной бесконечной комбинацией собственных функций»?

Данный случай представления в указанном пространстве плохо подходит для исследования предложенного вопроса в рамках идей функционального анализа. Только в случае бесконечномерного аналога евклидова пространства можно ответить на данный вопрос. Бесконечномерный аналог евклидова пространства отличается от произвольного линейного пространства, если в нем определено скалярное произведение. В линейном нормированном пространстве за «длину» вектора можно принять его норму. Но это еще не делает его настоящим аналогом евклидова пространства.

Непрерывные функции можно, не только складывать и умножать на числа, но и перемножать. При умножении будет выполняться условие

$$\|f \cdot g\| \le \|f\| \cdot \|g\|.$$

Введение в пространстве непрерывных функций в общем случае умножения как дополнительной структуры превращает это линейное пространство в банахову алгебру.

II.3. Некоторые применения методов функционального анализа

Идеи и методы функционального анализа находят многочисленные приложения в различных областях математики и широко используются при исследовании многих прикладных задач. В настоящем разделе применим методы функционального анализа к теории некорректных задач.

Понятие корректной постановки задач математической физики было введено Адамаром и состоит в следующем.

Решение всякой количественной задачи обычно заключается в нахождении «решения» z по заданным «исходным данным» u, $z = Au$. Будем считать u и z элементами некоторых нормированных пространств H_1 и H_2 с расстояниями между элементами

$$\rho_2(u_1, u_2), \rho_1(z_1, z_2), u_1, u_2 \in H_2, z_1, z_2 \in H_1.$$

Метрика обычно определяется постановкой задачи.

Задача называется корректно поставленной, если для каждого элемента $u \in H_2$ существует (и единственное) решение z из пространства H_1, причем это решение устойчиво к малым возмущениям «исходных данных» и, т. е. малым изменениям u соответствуют малые изменения соответствующих решений (близость элементов определяется в смысле метрики пространств H_1 и H_2 соответственно). Задачи, приводящие к уравнениям, не удовлетворяющим этим свойствам, называются некорректными.

С математической точки зрения корректность постановки задачи означает, что оператор A, действующий из нормированного пространства H_1 в нормированное пространство H_2, обратим, причем обратный оператор A^{-1} является непрерывным.

Условия существования и единственности решения уравнения $z = Au$ характеризуют математическую определенность задачи, условие же устойчивости решений связывается с физической детерминированностью задачи и возможностью ее решения по приближенным исходным данным, что является существенным моментом в реальных физических задачах, поскольку исходная информация поступает в результате измерений, а следовательно, с определенной степенью точности. Это обстоятельство долгое время ставило под сомнение целесообразность решения некорректных задач, поскольку не было ясно, какую физическую интерпретацию может иметь решение, если сколь угодно малым возмущениям исходных данных могут соответствовать большие изменения решений.

Однако дальнейшее развитие математики показало, что некорректно поставленные задачи имеют полное право на существование, поскольку оказалось, что исследование многих реальных физических процессов приводит к необходимости изучения именно некорректных задач. При этом широкое использование в настоящее время вычислительной техники привело к необходимости создания алгоритмов решения большого класса задач. Поскольку в общей ситуации задачи не являются корректными, необходимо определять, что понимается под «решением» задачи и какую связь это решение имеет с реальным физическим процессом. Эти вопросы, необходимость решения которых требовала практика, привели к созданию в основном усилиями советских математиков школ академиков А. Н. Тихонова и М. М. Лаврентьева теории и методов решения некорректно поставленных задач. При этом оказалось, что при исследовании такого рода задач широко используются методы функционального анализа. Приведем несколько примеров некорректно поставленных задач.

Пример 1. Задача дифференцирования функции $u(t)$, известной приближенно.

Пусть $z_1(t)$ есть производная функции $u_1(t)$. Функция $u_2(t) = u_1(t) + N \sin \omega t$ в метрике пространства $C[-1,1]$ отличается от $u_1(t)$ на величину $\rho(u_2, u_1) \le |N|$ при любых значениях ω. Однако производная $z_2(t) = u_2(t) = u_1(t) + N\omega \cos \omega t$ отличается от $z_1(t)$ в метрике $C[-1,1]$ на величину $|N\omega|$, которая может быть произвольно большой при достаточно больших значениях $|\omega|$.

Пример 2. Численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2.

Пусть

$$f_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt.$$

Если вместо a_n брать коэффициенты $c_n = a_n + \dfrac{\varepsilon}{n}$ для $n > 0$ и $c_0 = a_0$, получим ряд

$$f_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nt.$$

Коэффициенты этих рядов отличаются в метрике l_2 на величину

$$\varepsilon_1 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{1/2} = \varepsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}},$$

которую, выбором числа ε можно сделать сколь угодном малой. Вместе с этим разность

$$f_2(t) - f_1(t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt$$

может быть сколь угодно большой, поскольку при $t=0$ ряд расходится. Таким образом, если уклонение суммы ряда брать в метрике $C[-1,1]$, суммирование ряда Фурье не является устойчивым.

Пример 3. Решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром $K(x,s)$

$$\int_c^d K(x,s) z(s) ds = u(x), c \le x \le d,$$

где $z(s)$ - искомая функция из пространства H_1, $u(x)$ - заданная функция из пространства H_2. $K(x,s)$ будем предполагать непрерывно дифференцируемой по *x* и *s* функцией.

К уравнениям данного вида приводится ряд физических задач. Рассмотрим, например, задачу об изучении спектрального состава светового излучения (задача спектроскопии).

Пусть наблюдаемое излучение неоднородно, и распределение плотности энергии по спектру характеризуется функцией $z(s)$, где *s* - частота (или энергия). Пропуская это излучение через измерительную аппаратуру, мы получаем экспериментальный спектр $u(x)$. Если измерительная аппаратура линейна, то функциональная связь между $z(s)$ и $u(x)$ дается формулой

$$A(z) = \int_a^b K(x,s) z(s) ds = u(x),$$

где $K(x,s)$ - аппаратная функция, предполагаемая известной, *a* и *b* - границы спектра.

Решение $z(s)$ будем искать в классе непрерывных на отрезке $[c,d]$ функций. Уклонение правых частей друг от друга будем искать в квадратичной метрике, т. е. по формуле

$$\rho(u_1,u_2) = \left\{ \int_c^d [u_1(x) - u_2(x)]^2 dx \right\}^{1/2} = u(x),$$

а уклонение решений $z(s)$ - в метрике

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{x \in [a,b]} |z_1(s) - z_2(s)|.$$

Поскольку правая часть $u(x)$ может быть получена в эксперименте и иметь точки, в которых у функции $u(x)$ не существует производной, то при такой правой части наше уравнение не имеет решения, понимаемого в классическом смысле, т. е. определяемого по формуле $z = A^{-1}u$, где A^{-1} - оператор, обратный к A, так как в силу гладкости ядра $K(x,s)$ правая часть также должна иметь непрерывную производную по x. Значит, в качестве приближенного решения изучаемого уравнения нельзя брать точное решение этого уравнения с приближенной правой частью, поскольку такого решения может не существовать. Естественно возникает вопрос: что следует понимать под решением этого уравнения с приближенно известной правой частью? Кроме того, некорректность данной задачи проявляется еще и в том, что классическое решение этого уравнения неустойчиво по отношению к малым изменениям правой части.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии изучены основные понятия и методы функционального анализа. Эти методы проиллюстрированы различными примерами.

Функциональный анализ в настоящее время является одной из развивающихся областей математики, играющей важную роль в современной математике и имеющей многочисленные применения.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.

2. Колмогоров А.Н.., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.

4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2000.

5. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. М.: Просвещение, 1981.

6. Рид К. Гильберт. М., Наука, 1977.

7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматлит, 1961.

8. Садовничий В.А. Теория операторов. М., Изд-во Моск, университета, 1979.

9. Тихонов А. Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1966.

10. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979.

11. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М., Мир, 1963.

12. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М., МЦНМО, 2004.

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Методическое пособие

План университета 2019 г.

Редактор Н.В. Ефрюкова
Корректор Л.У. Семенова, А.М. Мамчуев
Компьютерная верстка С.А. Бостанова

Подписано в печать 06.06. 2019 г.
Формат 60х84/16
Бумага офисная
Объем 2,5 уч.изд.л.
Тираж 100 экземпляров

Издательство Карачаево-Черкесского государственного университета имени У.Д. Алиева: 369202, г. Карачаевск, ул. Ленина, 29
Лицензия ЛР № 040310 от 21.10.1997.

Отпечатано в типографии Карачаево-Черкесского государственного университета им. У.Д. Алиева: 369202. г. Карачаевск, ул. Ленина, 46